Ponavljanje za pismeni ispit – nizovi

1. Odredi 17. član aritmetičkog niza ako je 31. član 12 i 45. član 28.

   razmak između članova a_{17} i a_{31} jednak je razmaku između članova a_{31} i a_{45}, pa je a_{31} jednak aritmetičkoj sredini a_{17} i a_{45}

   $$a_{31}=\frac{a_{17}+a_{45}}{2}$$
   $$12=\frac{a_{17}+28}{2}\quad /\cdot 2$$
   $$24=a_{17}+28$$
   $$-a_{17}=28-24$$
   $$-a_{17}=4\quad /:(-1)$$
   $$\boxed{a_{17}=-4}$$

   kraći način:

   $$a_{45}-a_{31}=28-12=16$$
   $$\boxed{a_{17}}=a_{31}-16=12-16=\boxed{-4}$$

2. Odredi nepoznanicu x tako da brojevi $\sqrt{x}$, $\sqrt{5x+4}$ i $\sqrt{12x+13}$ budu uzastopni članovi aritmetičkog niza.

   $$a_{n-1}=\sqrt{x}$$
   $$a_n=\sqrt{5x+4}$$
   $$a_{n+1}=\sqrt{12x+13}$$
   $$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\quad /\cdot 2$$
   $$2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}$$
   $$2\sqrt{5x+4}=\sqrt{x}+\sqrt{12x+13}\quad /^2$$
   $$4(5x+4)=\left(\sqrt{x}+\sqrt{12x+13}\right)^2$$
   $$20x+16=\left(\sqrt{x}\right)^2+2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{12x+13}+\left(\sqrt{12x+13}\right)^2$$
   $$20x+16=x+2\sqrt{x(12x+13)}+12x+13$$
   $$20x+16-x-12x-13=2\sqrt{x(12x+13)}$$
   $$7x+3=2\sqrt{x(12x+13)}\quad /^2$$
   $$(7x+3)^2=4x(12x+13)$$
   $$(7x)^2+2\cdot 7x\cdot 3+3^2=48x^2+52x$$
   $$49x^2+42x+9-48x^2-52x=0$$
   $$x^2-10x+9=0$$
   $$x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot 1\cdot 9}}{2\cdot 1}=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{10\pm 8}{2}$$
   $$\boxed{x_1}=\frac{10-8}{2}=\frac{2}{2}=\boxed{1}$$
   $$\boxed{x_2}=\frac{10+8}{2}=\frac{18}{2}=\boxed{9}$$

3. Odredi aritmetički niz u kojem je zbroj prvog i šestog člana jednak 11, a razlika trostrukog osmog i dvostrukog četvrtog člana iznosi 43.

$$a_1 + a_6 = 11$$
$$\underline{3a_8 - 2a_4 = 43}$$
$$a_1 + a_1 + 5d = 11$$
$$\underline{3(a_1 + 7d) - 2(a_1 + 3d) = 43}$$
$$2a_1 + 5d = 11$$
$$\underline{3a_1 + 21d - 2a_1 - 6d = 43}$$
$$2a_1 + 5d = 11$$
$$\underline{a_1 + 15d = 43 \quad / \cdot (-2)}$$
$$2a_1 + 5d = 11$$
$$\underline{-2a_1 - 30d = -86 \quad +}$$
$$-25d = -75 \quad / : (-25)$$
$$d = 3$$
$$2a_1 + 5d = 11$$
$$2a_1 + 15 = 11$$
$$2a_1 = -4 \quad / : 2$$
$$a_1 = -2$$
$$\boxed{\text{niz} : -2, 1, 4, 7, 10, \ldots}$$

4. Je li broj -105 član aritmetičkog niza 14, 11, 8, 5, 2, ...?

$$a_1 = 14$$
$$d = -3$$
$$a_n = 14 + (n-1)(-3)$$
$$a_n = 14 - 3n + 3$$
$$a_n = -3n + 17$$
uvrstimo -105 kao a_n
$$-105 = -3n + 17$$
$$3n = 105 + 17$$
$$3n = 122 \quad / : 3$$
$$n = \frac{122}{3}$$
$$\boxed{\text{-105 nije član niza, jer indeks člana mora biti prirodni broj}}$$

5. Koliko ima prirodnih brojeva većih od 10 i manjih od 2000, koji su djeljivi s 5 i s 3?

djeljivi s 5:
15, 20, 25, ...
$$a_1 = 15$$
$$d = 5$$
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_n = 15 + (n-1) \cdot 5$$
$$a_n = 15 + 5n - 5$$
$$a_n = 5n + 10$$
$$a_n < 2000$$
$$5n + 10 < 2000$$
$$5n < 2000 - 10$$
$$5n < 1990 \quad / : 5$$

$n < 398$
djeljivih s 5 ima 397
djeljivi s 3:
12, 15, 18, ...
$a_1 = 12$
$d = 3$
$a_n = a_1 + (n-1)d$
$a_n = 12 + (n-1) \cdot 3$
$a_n = 12 + 3n - 3$
$a_n = 3n + 9$
$a_n < 2000$
$3n + 9 < 2000$
$3n < 2000 - 9$
$3n < 1991 \quad / : 3$
$n < 663.\dot{6}$
djeljivih s 3 ima 663
ne smijemo samo zbrojiti ta dva rezultata, jer postoje brojevi koji su djeljivi i s 5 i s 3 i njih bi, u tom slučaju, brojili dvaput
djeljivi s 15:
15, 30, 45, ...
$a_1 = 15$
$d = 15$
$a_n = a_1 + (n-1)d$
$a_n = 15 + (n-1) \cdot 15$
$a_n = 15 + 15n - 15$
$a_n = 15n$
$a_n < 2000$
$15n < 2000 \quad / : 15$
$n < 133.\dot{3}$
djeljivih s 15 ima 133
od zbroja prva dva rezultata moramo oduzeti treći, jer će tada brojevi djeljivi i s 5 i s 3 biti brojeni samo jedanput
$397 + 663 - 133 = \boxed{927}$

6. U aritmetičkom nizu je $a_1 = -\frac{17}{2}$, $d = \frac{3}{2}$ i $S_n = -25$. Izračunaj n i a_n.

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$
$$-25 = \frac{n}{2}\left[2 \cdot \left(-\frac{17}{2}\right) + (n-1) \cdot \frac{3}{2}\right]$$
$$-25 = \frac{n}{2}\left[-17 + \frac{3}{2}n - \frac{3}{2}\right]$$
$$-25 = \frac{n}{2}\left[\frac{3}{2}n - 17 - \frac{3}{2}\right]$$
$$-25 = \frac{n}{2}\left[\frac{3}{2}n - \frac{37}{2}\right]$$
$$-25 = \frac{3n^2}{4} - \frac{37n}{4} \quad / \cdot 4$$
$$-100 = 3n^2 - 37n$$

$$-3n^2+37n-100=0 \quad / :(-1)$$
$$3n^2-37n+100=0$$
$$n_{1,2}=\frac{37\pm\sqrt{(-37)^2-4\cdot 3\cdot 100}}{2\cdot 3}=\frac{37\pm\sqrt{1369-1200}}{6}=\frac{37\pm\sqrt{169}}{6}=\frac{37\pm 13}{6}$$
$$n_1=\frac{37-13}{6}=\frac{24}{6}=4$$
$$n_2=\frac{37+13}{6}=\frac{50}{6}=\frac{25}{3} \text{ ne prihvaćamo}$$
$$\boxed{n=4}$$
$$a_n=a_1+(n-1)d$$
$$a_n=-\frac{17}{2}+(4-1)\cdot\frac{3}{2}$$
$$a_n=-\frac{17}{2}+3\cdot\frac{3}{2}$$
$$a_n=-\frac{17}{2}+\frac{9}{2}$$
$$a_n=-\frac{8}{2}$$
$$\boxed{a_n=-4}$$

7. Riješi jednadžbu $x-1+x-3+...+x-27=70$.

$$(x-1)+(x-3)+...+(x-27)=70$$
$$a_1=x-1$$
$$a_n=x-27$$
$$S_n=70$$
$$d=a_2-a_1=(x-3)-(x-1)=x-3-x+1=-2$$
$$a_n=a_1+(n-1)d$$
$$x-27=x-1+(n-1)(-2)$$
$$-27=-1-2n+2$$
$$2n=-1+2+27$$
$$2n=28 \quad / :2$$
$$n=14$$
$$S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$$
$$70=\frac{14}{2}[2(x-1)+13\cdot(-2)]$$
$$70=7[2x-2-26] \quad / :7$$
$$10=2x-28$$
$$-2x=-28-10$$
$$-2x=-38 \quad / :(-2)$$
$$\boxed{x=19}$$

8. Između brojeva 9 i 321 interpoliraj aritmetički niz od 23 člana.

$$a=9$$
$$b=321$$
$$r=23$$
$$d=\frac{b-a}{r+1}=\frac{321-9}{23+1}=\frac{312}{24}=13$$

niz : 9, 22, 35, 48, 61, 74, 87, 100, 113, 126, 139, 152, 165, 178, 191, 204, 217, 230, 243, 256, 269, 282, 295, 308, 321

9. Odredi 50. član geometrijskog niza u kojem je 40. član 8 i 60. član 125.

razlika indeksa članova a_{40} i a_{50} jednaka je razlici indeksa članova a_{50} i a_{60}, pa je a_{50} jednak geometrijskoj sredini a_{40} i a_{60}

$$a_{50}^2 = a_{40} \cdot a_{60}$$
$$a_{50}^2 = 8 \cdot 125$$
$$a_{50}^2 = 1000 \quad / \sqrt{\ }$$
$$\boxed{(a_{50})_{1,2}} = \pm\sqrt{1000} = \pm\sqrt{100 \cdot 10} = \boxed{\pm 10\sqrt{10}}$$

10. Brojevi 1, x^2 i $x^2 + 72$ uzastopni su članovi geometrijskog niza. Koji su to brojevi?

$$a_{n-1} = 1$$
$$a_n = x^2$$
$$a_{n+1} = x^2 + 72$$
$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$
$$x^4 = x^2 + 72$$
$$x^4 - x^2 - 72 = 0$$
$$x^2 = t \quad (*)$$
$$t^2 - t - 72 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-72)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 288}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{1 \pm 17}{2}$$
$$t_1 = \frac{1-17}{2} = \frac{-16}{2} = -8$$
$$t_2 = \frac{1+17}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

povratak u relaciju (*)

$x^2 = -8$

nema rješenja

$x^2 = 9 \quad / \sqrt{\ }$

$x_{1,2} = \pm 3$

$\boxed{\text{niz: } 1,\ 9,\ 81}$

11. U geometrijskom je nizu drugi član za 5 veći od prvog, a četvrti za 30 veći od drugog. Koji je to niz?

$$a_2 = a_1 + 5$$
$$\underline{a_4 = a_2 + 30}$$
$$a_2 - a_1 = 5$$
$$\underline{a_4 - a_2 = 30}$$
$$a_1 q - a_1 = 5$$
$$\underline{a_1 q^3 - a_1 q = 30}$$
$$a_1(q-1) = 5 \quad (*)$$
$$\underline{a_1 q(q^2 - 1) = 30}$$

$$a_1(q-1)=5$$
$$\underline{a_1q(q-1)(q+1)=30 \quad \uparrow :}$$
$$\frac{a_1q(q-1)(q+1)}{a_1(q-1)}=\frac{30}{5}$$
$$q(q+1)=6$$
$$q^2+q-6=0$$
$$q_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-1\pm5}{2}$$
$$q_1=\frac{-1-5}{2}=\frac{-6}{2}=-3$$
$$q_2=\frac{-1+5}{2}=\frac{4}{2}=2$$
povratak u relaciju (*)

$$(a_1)_1(-3-1)=5$$
$$(a_1)_1(-4)=5 \quad / :(-4)$$
$$(a_1)_1=-\frac{5}{4}$$
$$\boxed{\text{niz 1.: } -\frac{5}{4}, \frac{15}{4}, -\frac{45}{4}, \ldots}$$

$$(a_1)_2(2-1)=5$$
$$(a_1)_2\cdot1=5$$
$$(a_1)_2=5$$
$$\boxed{\text{niz 2.: } 5, 10, 20, \ldots}$$

12. Odredi prvi po redu član geometrijskog niza $5, 15, 45, \ldots$, koji je veći od 5000.

$$a_1=5$$
$$q=3$$
$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$$
$$a_n=5\cdot3^{n-1}$$
$$a_n>5000$$
$$5\cdot3^{n-1}>5000 \quad / :5$$
$$3^{n-1}>1000 \quad /\log$$
$$\log3^{n-1}>\log1000$$
$$(n-1)\log3>\log1000 \quad / :\log3$$
$$n-1>\frac{\log1000}{\log3}$$
$$n>\frac{\log1000}{\log3}+1$$
$$n>7{,}288$$
$$n=8$$
$$\boxed{a_8}=5\cdot3^{8-1}=5\cdot3^7=\boxed{10935}$$

13. Odredi prvi član i zbroj prvih 7 članova geometrijskog niza u kojem je kvocijent 2, a sedmi član 128.

$$n=7$$
$$q=2$$
$$a_n=128$$
$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$$
$$128=a_1\cdot2^{7-1}$$

$128 = a_1 \cdot 2^6$

$128 = a_1 \cdot 64 \quad / : 64$

$\boxed{a_1 = 2}$

$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$\boxed{S_n} = 2 \cdot \frac{2^7 - 1}{2 - 1} = 2 \cdot \frac{128 - 1}{1} = 2 \cdot 127 = \boxed{254}$

14. Riješi jednadžbu $3 - 6 + 12 + ... - x = -63$.

$a_1 = 3$

$a_n = -x$

$S_n = -63$

$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-6}{3} = -2$

$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$

$-63 = \frac{(-x) \cdot (-2) - 3}{-2 - 1}$

$-63 = \frac{2x - 3}{-3} \quad / \cdot (-3)$

$189 = 2x - 3$

$-2x = -189 - 3$

$-2x = -192 \quad / : (-2)$

$\boxed{x = 96}$

15. Između brojeva 4 i 324 interpoliraj geometrijski niz od 3 člana.

$a = 4$

$b = 324$

$r = 3$

$q = \sqrt[r+1]{\frac{b}{a}} = \sqrt[3+1]{\frac{324}{4}} = \sqrt[4]{81} = 4$

$\boxed{\text{niz} : 4, 12, 36, 108, 324}$